Exercice 1: Loi E/S – Fermeture de chaîne

Etude géométrique

Question 1: Etablir les 3 équations géométriques du problème dans la base 0

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$
$$\lambda_{21}\overrightarrow{x_1} - L_{31}\overrightarrow{x_3} - L_0\overrightarrow{x_0} + H_0\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$
$$\lambda_{21}\overrightarrow{x_1} - L_{31}\overrightarrow{x_3} - L_0\overrightarrow{x_0} + H_0\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$
$$\begin{cases}\lambda_{21}\cos\theta_{10} - L_{31}\cos\theta_{30} - L_0 = 0\\ \lambda_{21}\sin\theta_{10} - L_{31}\sin\theta_{30} + H_0 = 0\end{cases}$$

Ajoutons les deux équations de fermeture angulaire :

$$(\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{x_0}}) = 0$$
$$\theta_{10} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0$$

Soient 4 équations :

$$\begin{cases}\theta_{10} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0\\ \lambda_{21}\cos\theta_{10} - L_{31}\cos\theta_{30} - L_0 = 0\\ \lambda_{21}\sin\theta_{10} - L_{31}\sin\theta_{30} + H_0 = 0\end{cases}$$

Question 2: Etablir la relation entrée/sortie en position $\lambda_{21} = f(\theta_{30})$

Méthode de somme des carrés :

$$\cos\theta_{10} = \frac{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}{\lambda_{21}} \quad ; \quad \sin\theta_{10} = \frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{\lambda_{21}}$$
$$\cos^2\theta_{10} + \sin^2\theta_{10} = 1$$
$${\lambda_{21}}^2 = (L_{31}\cos\theta_{30} + L_0)^2 + (L_{31}\sin\theta_{30} - H_0)^2$$
$$\lambda_{21} = \pm\sqrt{(L_{31}\sin\theta_{30} - H_0)^2 + (L_{31}\cos\theta_{30} + L_0)^2}$$

Dans le cas étudié, il est nécessaire de regarder « avec les mains » la bonne solution en regardant le signe de $\pm\sqrt{(L_{31}\sin\theta_{30} - H_0)^2 + (L_{31}\cos\theta_{30} + L_0)^2}$. On a $\lambda_{21} > 0$

D'où :

$$\boxed{\lambda_{21} = \sqrt{(L_{31}\sin\theta_{30} - H_0)^2 + (L_{31}\cos\theta_{30} + L_0)^2}}$$

Question 3: Proposer une méthode de résolution numérique permettant de déterminer θ_{30} pour une valeur donnée de λ_{21}

Procéder par dichotomie ou Newton sur la fonction :

$$f(x) = \sqrt{(L_{31} \sin x - H_0)^2 + (L_{31} \cos x + L_0)^2} - \lambda_{21}$$

Question 4: Exprimer θ_{32} en fonction du seul paramètre géométrique θ_{30} et des constantes (utile dans la suite) – On justifiera le choix de la fonction trigonométrique choisie

$$\theta_{32} = \theta_{30} - \theta_{10}$$

Il faut donc exprimer θ_{30} en fonction de θ_{10}.

$$\begin{cases} \lambda_{21} \cos \theta_{10} - L_{31} \cos \theta_{30} - L_0 = 0 \\ \lambda_{21} \sin \theta_{10} - L_{31} \sin \theta_{30} + H_0 = 0 \end{cases}$$

On peut au choix utiliser un arccos, arcsin, ou arctan pour exprimer θ_{30}. Compte tenu du mécanismes étudié, θ_{30} étant l'angle $(\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_3}})$, cet angle évolue dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On choisit dont l'arcsin ou arctan, mais cette dernière est plus simple :

$$\tan \theta_{10} = \frac{L_{31} \sin \theta_{30} - H_0}{L_{31} \cos \theta_{30} + L_0}$$

$$\theta_{10} = \tan^{-1}\left(\frac{L_{31} \sin \theta_{30} - H_0}{L_{31} \cos \theta_{30} + L_0}\right)$$

$$\boxed{\theta_{32} = \theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31} \sin \theta_{30} - H_0}{L_{31} \cos \theta_{30} + L_0}\right)}$$

Voici la formule avec sin :

$$\sin \theta_{10} = \frac{L_{31} \sin \theta_{30} - H_0}{\lambda_{21}} = \frac{L_{31} \sin \theta_{30} - H_0}{\sqrt{(L_{31} \sin \theta_{30} - H_0)^2 + (L_{31} \cos \theta_{30} + L_0)^2}}$$

$$\theta_{32} = \theta_{30} - \sin^{-1}\left(\frac{L_{31} \sin \theta_{30} - H_0}{\sqrt{(L_{31} \sin \theta_{30} - H_0)^2 + (L_{31} \cos \theta_{30} + L_0)^2}}\right)$$

Question 5: Etablir la relation entrée/sortie en position $\boldsymbol{\lambda_{21} = f(\theta_{10})}$

Dans la base 0 (pas idéal) :

$$\begin{cases} \theta_{10} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0 \\ \lambda_{21} \cos\theta_{10} - L_{31}\cos\theta_{30} - L_0 = 0 \\ \lambda_{21}\sin\theta_{10} - L_{31}\sin\theta_{30} + H_0 = 0 \end{cases}$$

$$\cos\theta_{30} = \frac{\lambda_{21}\cos\theta_{10} + L_0}{L_{31}} \quad ; \quad \sin\theta_{30} = \frac{\lambda_{21}\sin\theta_{10} - H_0}{L_{31}}$$

$$\cos^2\theta_{30} + \sin^2\theta_{30} = 1$$

$${L_{31}}^2 = (\lambda_{21}\cos\theta_{10} + L_0)^2 + (\lambda_{21}\sin\theta_{10} - H_0)^2$$

La suite est un peu galère… Développer, regrouper, puis polynôme de degré 2. Allez, je me lance

$${L_{31}}^2 = {\lambda_{21}}^2\cos^2\theta_{10} + {L_0}^2 + 2L_0\cos\theta_{10}\,\lambda_{21} + {\lambda_{21}}^2\sin^2\theta_{10} + {H_0}^2 - 2H_0\sin\theta_{10}\,\lambda_{21}$$

$${\lambda_{21}}^2 + 2(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10})\lambda_{21} + {H_0}^2 + {L_0}^2 - {L_{31}}^2 = 0$$

$$\Delta = 4(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10})^2 - 4\left({H_0}^2 + {L_0}^2 - {L_{31}}^2\right)$$

Il faudrait discuter des conditions géométriques qui font que $\Delta > 0$

$$\lambda_{21} = \frac{-2(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10}) \pm \sqrt{4(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10})^2 - 4\left({H_0}^2 + {L_0}^2 - {L_{31}}^2\right)}}{2}$$

$$\lambda_{21} = H_0\sin\theta_{10} - L_0\cos\theta_{10} \pm \sqrt{(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10})^2 - \left({H_0}^2 + {L_0}^2 - {L_{31}}^2\right)}$$

On pourrait s'arrêter là et choisir la solution, comme je l'ai fait dans la base 1 ci-dessous, solution + :

$$(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10})^2 - \left({H_0}^2 + {L_0}^2 - {L_{31}}^2\right)$$
$$= {L_0}^2\cos^2\theta_{10} + {H_0}^2\sin^2\theta_{10} - 2L_0\cos\theta_{10}\,H_0\sin\theta_{10} - {H_0}^2 - {L_0}^2 + {L_{31}}^2$$
$$= {L_0}^2(\cos^2\theta_{10} - 1) + {H_0}^2(\sin^2\theta_{10} - 1) - 2L_0\cos\theta_{10}\,H_0\sin\theta_{10} + {L_{31}}^2$$
$$= -{L_0}^2\sin^2\theta_{10} - {H_0}^2\cos^2\theta_{10} - 2L_0\cos\theta_{10}\,H_0\sin\theta_{10} + {L_{31}}^2$$
$$= {L_{31}}^2 - \left({L_0}^2\sin^2\theta_{10} + {H_0}^2\cos^2\theta_{10} + 2L_0\cos\theta_{10}\,H_0\sin\theta_{10}\right)$$
$$= {L_{31}}^2 - (L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10})^2$$

Dans la base 1 :

$$\lambda_{21}\overrightarrow{x_1} - L_{31}\overrightarrow{x_3} - L_0\overrightarrow{x_0} + H_0\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \lambda_{21} - L_{31}\cos\theta_{32} - L_0\cos\theta_{01} - H_0\sin\theta_{01} = 0 \\ -L_{31}\sin\theta_{32} - L_0\sin\theta_{01} + H_0\cos\theta_{01} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{21} - L_{31}\cos\theta_{32} - L_0\cos\theta_{10} + H_0\sin\theta_{10} = 0 \\ -L_{31}\sin\theta_{32} + L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10} = 0 \end{cases}$$

$$\cos\theta_{32} = \frac{\lambda_{21} - L_0\cos\theta_{10} + H_0\sin\theta_{10}}{L_{31}} \quad ; \quad \sin\theta_{32} = \frac{L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10}}{L_{31}}$$

$$\cos^2\theta_{32} + \sin^2\theta_{32} = 1$$

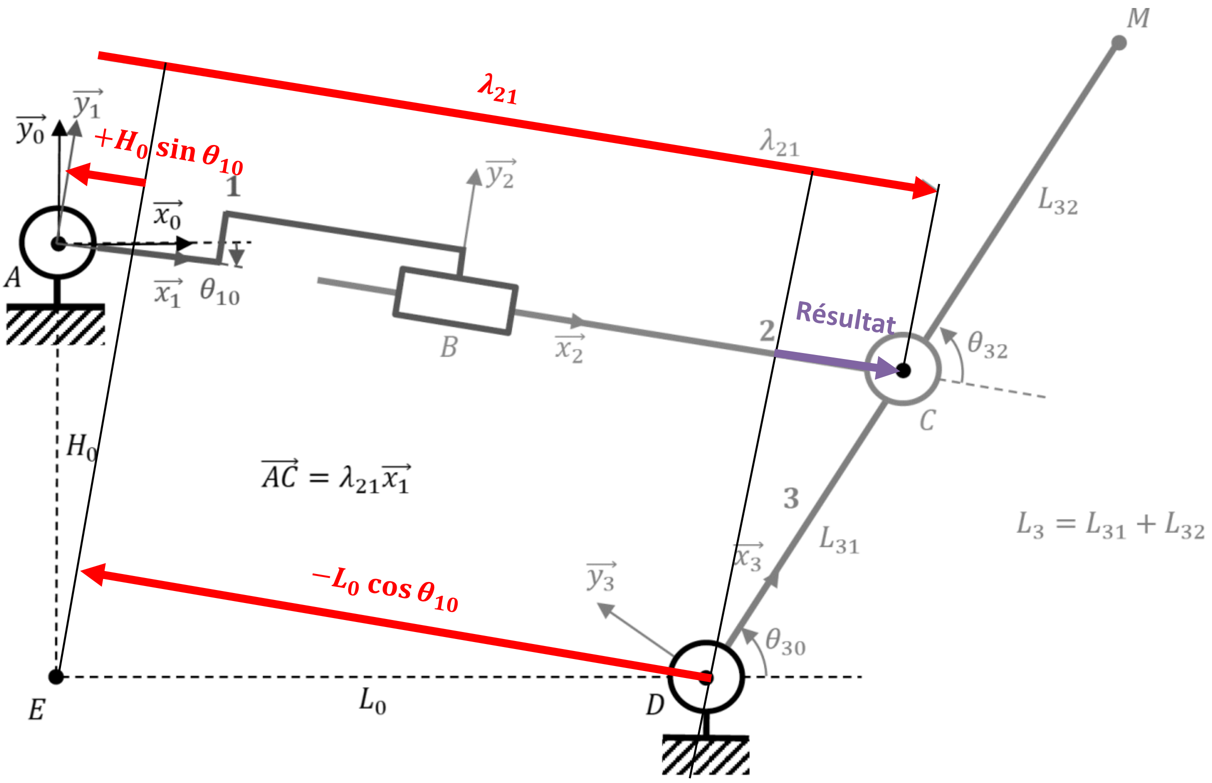
$${L_{31}}^2 = (\lambda_{21} - L_0\cos\theta_{10} + H_0\sin\theta_{10})^2 + (L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10})^2$$

$$(\lambda_{21} - L_0\cos\theta_{10} + H_0\sin\theta_{10})^2 = {L_{31}}^2 - (L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10})^2$$

Avant de passer à la racine, il faudrait discuter du signe de ${L_{31}}^2 - (L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10})^2$…

$$\lambda_{21} - L_0\cos\theta_{10} + H_0\sin\theta_{10} = \pm\sqrt{{L_{31}}^2 - (L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10})^2}$$

Solution après avoir regardé le signe de $\lambda_{21} - L_0 \cos\theta_{10} + H_0 \sin\theta_{10}$ (λ_{21} moins la projection de AD sur AC – Attention, $H_0 \sin\theta_{10} < 0$ sur le schéma) :



$$\lambda_{21} - L_0 \cos\theta_{10} + H_0 \sin\theta_{10} = \sqrt{{L_{31}}^2 - (L_0 \sin\theta_{10} + H_0 \cos\theta_{10})^2}$$

$$\boxed{\lambda_{21} = L_0 \cos\theta_{10} - H_0 \sin\theta_{10} + \sqrt{{L_{31}}^2 - (L_0 \sin\theta_{10} + H_0 \cos\theta_{10})^2}}$$

Etude cinématique

Question 6: Proposer les 4 torseurs cinématiques des liaisons du mécanismes, et réalisez les choix de points et bases qui seront utiles pour la suite

$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{03} & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$

Question 7: Etablir les 2 équations vectorielles de la fermeture cinématique du système en C

$$\{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{04}\} + \{\mathcal{V}_{43}\} + \{\mathcal{V}_{32}\} + \{\mathcal{V}_{21}\} = \{0\}$$

$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ \lambda_{21}R_{10}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}_C$	$\vec{V}(C,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}}$ $= -\lambda_{21}\overrightarrow{x_1} \wedge R_{10}\overrightarrow{z_1}$ $= \lambda_{21}R_{10}\overrightarrow{y_1}$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} R_{03}\overrightarrow{z_0} \\ L_{31}R_{03}\overrightarrow{y_3} \end{Bmatrix}_C$	$\vec{V}(C,0/3) = \vec{V}(D,0/3) + \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{\Omega_{03}}$ $= -L_{31}\overrightarrow{x_3} \wedge R_{03}\overrightarrow{z_3}$ $= L_{31}R_{03}\overrightarrow{y_3}$
$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$	
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ U_{21}\overrightarrow{x_1} \end{Bmatrix}_C$	

$$\begin{cases} (R_{10} + R_{03} + R_{32})\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \\ \lambda_{21}R_{10}\overrightarrow{y_1} + L_{31}R_{03}\overrightarrow{y_3} + U_{21}\overrightarrow{x_1} = \vec{0} \end{cases}$$

Question 8: Etablir les 3 équations de la fermeture cinématique du système dans $\mathfrak{B}_1$

$$\boxed{\begin{cases} R_{10} + R_{03} + R_{32} = 0 \\ U_{21} - L_{31}R_{03}\sin\theta_{32} = 0 \\ \lambda_{21}R_{10} + L_{31}R_{03}\cos\theta_{32} = 0 \end{cases}}$$

Question 9: Déterminer R_{40} en fonction de l'unique inconnue cinématique R_{21} et des paramètres géométriques

$$U_{21} - L_{31} R_{03} \sin\theta_{32} = 0$$

$$R_{03} = \frac{1}{L_{31}} \frac{1}{\sin\theta_{32}} U_{21}$$

$$\boxed{R_{30} = -\frac{1}{L_{31}} \frac{1}{\sin\theta_{32}} U_{21}}$$

Question 10: Exprimer R_{30} en fonction de l'unique inconnue cinématique U_{21}, de l'unique paramètre géométrique variable θ_{30} et des constantes

$$\theta_{32} = \theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)$$

$$\boxed{R_{30} = -\frac{1}{L_{31}} \frac{1}{\sin\left(\theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)\right)} U_{21}}$$

Question 11: Exprimer finalement $\vec{V}(M,3/0)$ en fonction de l'unique inconnue cinématique U_{21} et du seul paramètre géométrique variable θ_{30} et des constantes, le tout projeté dans la base 0

Deux solutions, je prends le plus court chemin :

$$\vec{V}(M,3/0) = \vec{V}(D,3/0) + \overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{\Omega_{30}}$$

$$\vec{V}(M,3/0) = \overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{\Omega_{30}} = -L_3 \overrightarrow{x_3} \wedge R_{30} \overrightarrow{z_3} = L_3 R_{30} \overrightarrow{y_3}$$

$$\vec{V}(M,3/0) = -\frac{L_3}{L_{31}} \frac{1}{\sin\left(\theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)\right)} U_{21} \overrightarrow{y_3}$$

$$\vec{V}(M,3/0) = -\frac{L_3}{L_{31}} \frac{1}{\sin\left(\theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)\right)} U_{21} \begin{pmatrix} \cos\theta_{30} \\ \sin\theta_{30} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

Etude statique

Question 12: Justifier le fait que $\overrightarrow{R_{23}} = R_{23}\overrightarrow{x_2}$

La pièce 2 est soumise à deux glisseurs…

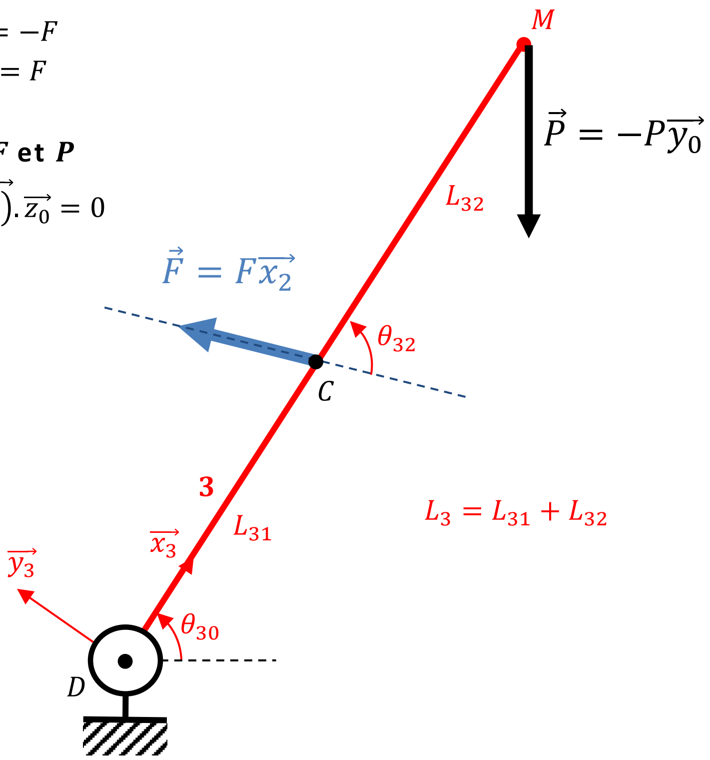
Question 13: Justifier le fait que $R_{23} = F$

On isole 2 : TRS sur $\overrightarrow{x_1}$: $F + R_{32} = 0$

$$R_{32} = -F$$
$$R_{23} = F$$

Question 14: En déduire la relation entre F et P

On isole 3 : TMS en D sur $\overrightarrow{z_0}$: $\overrightarrow{M_D\left(\overrightarrow{R_{23}}\right)}.\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{M_D\left(\vec{P}\right)}.\overrightarrow{z_0} = 0$



$$\overrightarrow{M_D\left(\overrightarrow{R_{23}}\right)}.\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{M_D\left(\vec{P}\right)}.\overrightarrow{z_0} = 0$$

$$\overrightarrow{DC}\wedge\left(F\overrightarrow{x_2}\right).\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{DM}\wedge\left(-P\overrightarrow{y_0}\right).\overrightarrow{z_0} = 0$$

$$\left[L_{31}\overrightarrow{x_3}\wedge\left(F\overrightarrow{x_2}\right)\right].\overrightarrow{z_0} + \left[L_3\overrightarrow{x_3}\wedge\left(-P\overrightarrow{y_0}\right)\right].\overrightarrow{z_0} = 0$$

$$FL_{31}\sin\left(\widehat{\overrightarrow{x_3}\wedge\overrightarrow{x_2}}\right) - PL_3\sin\left(\widehat{\overrightarrow{x_3}\wedge\overrightarrow{y_0}}\right) = 0$$

$$FL_{31}\sin\theta_{23} - PL_3\sin\left(\theta_{03} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$FL_{31}\sin\theta_{23} - PL_3\cos\theta_{03} = 0$$

$$-FL_{31}\sin\theta_{32} - PL_3\cos\theta_{30} = 0$$

$$\boxed{F = -\frac{L_3}{L_{31}}\frac{\cos\theta_{30}}{\sin\theta_{32}}P}$$

Question 15: Exprimer F en fonction de P, de l'unique paramètre géométrique variable θ_{30} et des constantes

$$\theta_{32} = \theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)$$

$$\boxed{F = -\frac{L_3}{L_{31}}\frac{\cos\theta_{30}}{\sin\left(\theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)\right)}P}$$

Etude dynamique (5/2)

Question 16: Retrouver la relation statique entrée/sortie à l'aide du TEC et de la relation cinématique entrée/sortie

$$\{\mathcal{V}_{21}\}\{\mathcal{T}_{1\to 2}^{m}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to 3}\}\{\mathcal{V}_{30}\} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1} \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{30} & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_1} = 0$$

$$\overrightarrow{M_E(\vec{P})} = \overrightarrow{EM}\wedge(-P\overrightarrow{y_0}) = L_3\overrightarrow{x_3}\wedge(-P\overrightarrow{y_0}) = -PL_3\sin(\widehat{\overrightarrow{x_3}\wedge\overrightarrow{y_0}}) = -PL_3\sin\left(\theta_{03} + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{z_0}$$
$$= -PL_3\cos\theta_{03}\,\overrightarrow{z_0} = -PL_3\cos\theta_{30}\,\overrightarrow{z_0}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1} \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & -PL_3\cos\theta_{30} \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_0} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{30} & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_0} = 0$$

Soit :

$$U_{21}F - PL_3\cos\theta_{30}\,R_{30} = 0$$

$$F = PL_3\cos\theta_{30}\frac{R_{30}}{U_{21}}$$

Or :

$$R_{30} = -\frac{1}{L_{31}}\frac{1}{\sin\theta_{32}}U_{21}$$

Soit :

$$\boxed{F = -\frac{L_3}{L_{31}}\frac{\cos\theta_{30}}{\sin\theta_{32}}P}$$